

Pratique Supplémentaire 5 (Corrigé)

Cette série fait suite aux chapitres 2.2, 2.3, 3.1, 3.2 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Remarques : il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

Exercice 1

Soit A une matrice $n \times n$ telle que $A^3 = 0$. Montrer que $I_n - A$ est inversible et que son inverse est donné par $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2$.

Sol.: Posons $C := I_n + A + A^2$. On calcule

$$(I_n - A)C = C - AC = (I_n + A + A^2) - (A + A^2 + \underbrace{A^3}_{=0}) = I_n.$$

De même,

$$C(I_n - A) = C - CA = (I_n + A + A^2) - (A + A^2 + \underbrace{A^3}_{=0}) = I_n.$$

Ceci implique bien que $I_n - A$ est inversible et que son inverse est donné par C .

Exercice 2

Déterminer l'ensemble des valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ pour les quelles les matrices suivantes sont inversibles. Ensuite, donner l'inverse de la matrice considérée pour ces valeurs de λ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \lambda \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & \lambda \\ 3 & 2 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Sol.: Après plusieurs opérations élémentaires, on a transformé la paire $(A | I_3)$ en

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -2 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

La matrice à gauche est ligne-équivalente à la matrice identité I_3 si et seulement si $\lambda \neq 0$. Donc A est inversible si et seulement si $\lambda \neq 0$, et dans ce cas son inverse est donné par

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2/\lambda & 1/\lambda & 1/\lambda \end{pmatrix}$$

Pour la seconde, on procède de même, et on montre que B est inversible si et seulement si $\lambda \neq 1/2$, et que dans ce cas

$$B^{-1} = \frac{1}{5(1-2\lambda)} \begin{pmatrix} 5-7\lambda & 1-\lambda & -\lambda \\ 3\lambda & 1-\lambda & -\lambda \\ -15 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

Pour quelles valeurs de c_1, c_2, c_3 la matrice suivante est-elle inversible ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \end{pmatrix}$$

Indication : Montrer que $\det A = (c_2 - c_1)(c_3 - c_1)(c_3 - c_2)$.

Sol.:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & c_1 & c_1^2 \\ 1 & c_2 & c_2^2 \\ 1 & c_3 & c_3^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{échelonnement partiel (ne modifie pas le det)}} \begin{pmatrix} 1 & c_1 & c_1^2 \\ 0 & c_2 - c_1 & c_2^2 - c_1^2 \\ 0 & c_3 - c_2 & c_3^2 - c_2^2 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\det A = \det A^T = (c_2 - c_1)(c_3 - c_2)(c_3 - c_1).$$

La matrice A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$. Ainsi, A est inversible si et seulement si $c_i \neq c_j$ pour tous $i, j = 1, 2, 3$, avec $i \neq j$.

En général, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_1^2 & c_2^2 & \dots & c_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1^{n-1} & c_2^{n-1} & \dots & c_n^{n-1} \end{pmatrix}$, $\det A = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (c_j - c_i)$ s'appelle un déterminant

de Vandermonde (à noter que la forme typique de la matrice de Vandermonde est A^T , qui a bien entendu le même déterminant que A).

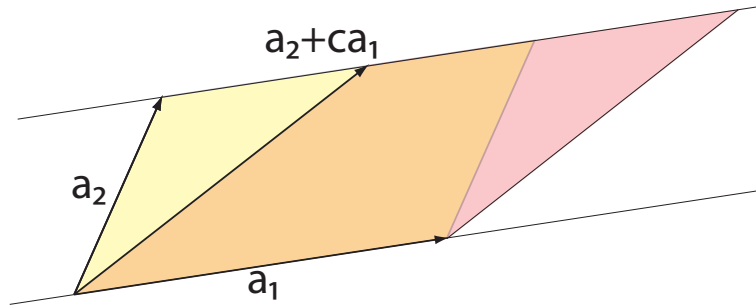
Exercice 4

- Soient \vec{a}_1 et \vec{a}_2 deux vecteurs non nuls de \mathbb{R}^2 . Montrer que l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs \vec{a}_1 et \vec{a}_2 est la même que l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs \vec{a}_1 et $\vec{a}_2 + c \vec{a}_1$, où $c \in \mathbb{R}$ est un scalaire.
- Montrer que si A est une matrice de taille 2×2 , alors l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs colonnes de A est égale à $|\det A|$.

Indications : Se rappeler que $A = (A^T)^T$ et que $\det A^T = \det A$, et essayer de se ramener au cas des matrices diagonales.

Sol.:

- a) L'aire d'un parallélogramme est égale au produit de la base par la hauteur. Les parallélogrammes ont la même base et une hauteur identique, donc la même aire.



- b) On va prouver que pour toute matrice B de taille 2×2 , l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs lignes de B est égale à $|\det B|$. Il suffira ensuite, pour A matrice quelconque de taille 2×2 , d'appliquer ce résultat à $B = A^T$, en se rappelant que $\det A^T = \det A$. On traite à part le cas où la matrice B n'est pas inversible, i.e. $\det B = 0$. Dans ce cas, les vecteurs lignes de B sont obligatoirement des multiples, et l'aire du parallélogramme formé par ces vecteurs est alors nulle. L'assertion est donc vraie dans ce cas. On suppose désormais que la matrice B est inversible, i.e. $\det B \neq 0$. En notant $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a forcément $a \neq 0$ ou $c \neq 0$. On s'intéresse au cas $a \neq 0$, le cas $c \neq 0$ se traite de la même manière en effectuant une permutation des lignes 1 et 2, opération élémentaire qui ne modifie pas $|\det B|$ ni l'aire du parallélogramme associé. Pour une matrice diagonale (inversible) de taille 2×2 de la forme $\tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{a} & 0 \\ 0 & \tilde{d} \end{pmatrix}$, on a $|\det \tilde{B}| = |\tilde{a}\tilde{d}| (\neq 0)$ et $|\tilde{a}\tilde{d}|$ est clairement l'aire du rectangle associé. On doit désormais démontrer qu'on peut transformer toute matrice B inversible de taille 2×2 en une matrice diagonale (inversible) sans changer $|\det B|$ ou l'aire du parallélogramme associé. On sait que les opérations élémentaires utilisées pour transformer B en une matrice diagonale (ajouter à une ligne α fois une autre ligne) ne changent pas $|\det B|$. Par ailleurs, d'après la question a), les opérations élémentaires (sur les lignes) ne changent pas non plus l'aire du parallélogramme associé. Par conséquent, on peut transformer toute matrice B inversible de taille 2×2 en une matrice diagonale (inversible) sans changer $|\det B|$ ou l'aire du parallélogramme associé. Ces deux quantités étant égales pour les matrices diagonales, ceci conclut la preuve.

Exercice 5

Calculer les déterminants suivants en utilisant le développement selon une ligne ou une colonne, et la méthode de Gauss d'échelonnage :

$$a = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 7 & 3 \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 8 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & -8 & -4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix},$$

$$d = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}, \quad e = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ -3 & 4 & -2 & 8 \\ 3 & -4 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Sol.:

- Par un développement selon la première ligne, on calcule deux déterminants 2×2 et trouve $a = 4$.
- Par un développement selon la troisième ligne, puis la première, on trouve $b = 10$.
- En fait, la matrice étant triangulaire, nous savons que le déterminant est égal au produit des éléments de la diagonale. On trouve $c = 72$
- On applique ici la méthode de Gauss : $d = 3$.
- La réduction sous forme échelonnée de cette matrice fait surgir une ligne sans pivot. On en conclut que $e = 0$.

Exercice 6

Sachant que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 7,$$

calculer les déterminants

$$t = \begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}, \quad s = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{vmatrix}.$$

Sol.:

- $t = 7$. En effet, on a obtenu cette matrice à partir de la matrice originale en ajoutant la seconde ligne à la première ce qui ne change pas le déterminant.
- $s = 14$. En effet, on a obtenu cette matrice à partir de la matrice originale en multipliant la deuxième ligne par 2, ce qui multiplie également le déterminant par 2, puis en ajoutant la première ligne à la seconde, ce qui ne change pas la valeur du déterminant. ce qui ne change pas le déterminant.

Exercice 7

Calculer le volume du parallélépipède dont un sommet se trouve à l'origine et les trois sommets adjacents se trouvent en $(1, 4, 0)$, $(-2, -5, 2)$ et $(-1, 2, -1)$.

Sol.: Le parallélépipède décrit est supporté par les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ainsi son volume est la valeur absolue du déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On trouve 15.

Exercice 8

Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sol.: On échelonne la matrice afin de rendre les calculs plus simples. On obtient $\det(A) = 16$. En effet en utilisant L_1 pour échelonner L_2 et L_3 et L_3 pour L_4 et L_5 (ça fera apparaître le plus rapidement possible des 0)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \dots \underset{\text{opérations de type 3}}{\sim} \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Puis en utilisant L_2

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{\text{opérations de type 3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_5 \leftarrow L_5 - L_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

En permutant L_2 et L_3 on obtient une matrice triangulaire supérieure, que l'on appelle A'

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Le calcul de $\det(A)$ sera impacté par la permutation de la manière suivante

$$\det(A) = (-1)\det(A') = (-1)(1 \cdot (-2) \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = (-1)(-16) = 16$$

Exercice 9

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

- a) Si une matrice A est triangulaire inférieure, alors son déterminant s'obtient comme le produit des éléments de sa diagonale. □ □

- b) $\det A^T = -\det A$ pour toute matrice carrée A .
 c) Il se peut que l'inverse d'une matrice A existe même si $\det A = 0$.
 d) Soient A une matrice $n \times n$ et $k \in \mathbb{R}$. Alors, $\det(kA) = k^n \det A$.

Sol.:

- a) Vrai. Si une matrice A est triangulaire inférieure, alors en développant successivement par rapport à la 1ère ligne, 2ème, jusqu'à la n -ème on obtient bien le produit des éléments de sa diagonale.
 b) Faux. D'après un théorème on a que $\det A^T = \det A$ pour toute matrice carrée A .
 c) Faux. Par un théorème du cours, A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.
 d) Vrai. Soient A une matrice $n \times n$ et $k \in \mathbb{R}$. Alors, $\det(kA) = k^n \det A$. En effet, la matrice kA s'obtient en multipliant chaque ligne de A par le nombre k . Puisqu'il y a n lignes on aura donc multiplié le déterminant de A par $\underbrace{k \cdot \dots \cdot k}_{n \text{ fois}} = k^n$.

Exercice 10

- a) Soit A et B deux matrices inversibles de taille 3×3 . On forme la matrice C en multipliant la 3ème ligne de A par 5, puis la 2ème colonne de cette matrice par -3 . On définit la matrice $D = C \cdot 2B$. Alors
- $\det D = 30 \det A \det B$;
 $\det D = -60 \det A \det B$;
 $\det D = 90 \det A \det B$;
 $\det D = -120 \det A \det B$.
- b) Soit A et B deux matrices inversibles de taille 3×3 . On obtient la matrice C à partir de A en multipliant par 4 la matrice A , puis en échangeant les lignes 1 et 2. On obtient la matrice D à partir de B en multipliant par 4 la deuxième colonne et en ajoutant 4 fois la première colonne à la troisième.
- $\det(C \cdot D^{-1}) = -4 \det A \cdot (\det B)^{-1}$;
 $\det(C \cdot D^{-1}) = -\det A \cdot (\det B)^{-1}$;
 $\det(C \cdot D^{-1}) = -16 \det A \cdot (\det B)^{-1}$;
 $\det(C \cdot D^{-1}) = -\frac{1}{4} \det A \cdot (\det B)^{-1}$.

Sol.:

- a) $\det D = -120 \det A \det B$.
 En effet le déterminant de la matrice C est celui de A multiplié par $5 \cdot (-3)$ par linéarité du déterminant comme fonction d'une ligne, puis d'une colonne. Le déterminant de la matrice $2B$ vaut $2^3 \det B$ car on multiplie chacune des trois lignes par 2. Il faut ainsi multiplier $\det A \cdot \det B$ par $-15 \cdot 8 = -120$.

b) $\square \det(C \cdot D^{-1}) = -16 \det A \cdot (\det B)^{-1}$.

En effet, le déterminant de la matrice C est celui de A multiplié par $4^3 \cdot (-1)$, par linéarité du déterminant par rapport à chacune des lignes et puisque le déterminant change de signe lorsque l'on échange deux lignes. Le déterminant de D vaut 4 fois celui de B , par linéarité du déterminant comme fonction d'une colonne et parce que ajouter tant de fois une colonne à une autre ne change pas le déterminant. De plus, $\det(D^{-1}) = \det(D)^{-1}$ et ainsi

$$\det(C \cdot D^{-1}) = \det(C) \cdot \det(D^{-1}) = -4^3 \det(A) \cdot (4 \det(B))^{-1} = -16 \det(A) \cdot (\det(B))^{-1}$$